Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Par

J.-P. Gram.

(Présenté dans la séance du 17 mai 1895.)

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann a dans ces dernières années beaucoup attiré l'attention des géomètres, non seulement à cause de l'application qu'on en a faite au problème des nombres premiers, mais aussi parce qu'elle est étroitement liée à diverses autres fonctions transcendantes et parce qu'elle fournit un nouvel exemple de l'application de la théorie moderne des fonctions analytiques.

Comme on le sait, cette fonction se présente tout d'abord sous la forme

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$$

ou

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

L'une et l'autre de ces expressions n'est valable que si la partie réelle de la variable complexe s est plus grande que 1.

Riemann est le premier qui ait reconnu le vrai caractère de la fonction en question, et il a donné une définition générale qui permet de montrer que $\zeta(s)$ est une fonction méromorphe ayant le seul pôle $s = 1$. C'est à présent un fait bien connu qu'elle peut être représentée par une expression de la forme

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + P(s),$$

où $P(s)$ désigne une série entière, convergente dans tout le plan.

On sait également corriger les définitions incomplètes de la fonction tant par la série $\sum\limits_1^\infty n^{-s}$ que par l'intégrale définie $\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$, de manière qu'elles puissent être appliquées aux régions du plan autres que celles qui sont situées à droite de la ligne représentée par $s = 1$.

Je me bornerai seulement à citer la formule suivante

$$\sum_1^n n^{-s} = \zeta(s) + \frac{n^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}n^{-s} - \frac{s}{2!}B_1 n^{-s-1} + \frac{s(s+1)(s+2)}{4!}B_3 n^{-s-3} + \ldots,$$

qui, s étant supposé réel, donne la valeur de $\zeta(s)$, en général, au moyen d'une série semi-convergente. Si toutefois s est égal à un nombre entier négatif ou si l'on fait $n = \infty$, la série se réduit à un nombre fini de termes. On obtient ainsi, pour les valeurs de s dont la partie réelle est positive, l'expression

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty}\left(\sum_1^n n^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}\right).$$

Cette formule, trouvée avec une légère modification par M. Pilz et un peu plus tard retrouvée indépendamment par MM. Stieltjes et J. L. W. V. Jensen, a été appliquée par ce dernier auteur au calcul des coefficients de la série

$$s\,\zeta(1-s) = c_0 + c_1 s + c_2 s + \ldots$$

Rappelons encore que Riemann lui-même a démontré que, si l'on pose

$$\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)\,\zeta(s) = F\left(s-\frac{1}{2}\right),$$

on obtient une nouvelle fonction analytique qui est holomorphe dans tout le plan et qui en outre est une fonction paire de

$(s-\frac{1}{2})$. En posant $s-\frac{1}{2}=ti$, **Riemann** représente cette fonction par $\xi(t)$.

Sur la fonction $\xi(t)$ **Riemann** indique sans démonstration deux théorèmes importants.

Le premier de ces théorèmes, qui énonce que la fonction $\xi(t)$ considérée comme fonction de t^2 est du genre zéro et que $\xi(t)$ par conséquent peut être représentée par un produit de facteurs primaires de la forme $k\cdot\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)$, a été démontré par M. Hadamard. Le second théorème, consistant en ce que toutes les quantités α, racines de l'équation transcendante $\xi(t)=0$, sont réelles, est resté jusqu'ici sans démonstration.

La théorie générale des fonctions ζ et ξ est donc encore assez incomplète. On ne possède notamment, pour les coefficients des séries en question, aucune expression assez simple pour qu'on puisse calculer sans difficulté la valeur numérique d'une de ces fonctions pour une valeur donnée de l'argument. Et en ce qui concerne les racines α, on sait seulement que la plus petite d'entre elles surpasse 12 (Mangoldt). Feu M. Stieltjes est, à ma connaissance, le seul auteur qui ait entrepris le calcul numérique de ces racines; dans une lettre de 1887, il me dit qu'il a trouvé la valeur de α_1 égale à environ 14·5.

Mais plus la théorie générale reste en défaut, plus les résultats d'un calcul numérique auront d'importance, non seulement à cause des renseignements qu'ils donnent sur les variations que peuvent subir les fonctions en question, mais aussi parce qu'il peut arriver que le calcul numérique fournisse un guide utile pour les considérations théoriques.

Néanmoins, aucun des auteurs qui se sont occupés de la fonction ζ ne semble avoir eu le courage de continuer et de compléter les calculs de MM. Jensen et Stieltjes. Cela ne peut étonner personne, car pour arriver à une determination, qui ait quelque valeur, des premières racines α, il faut faire le calcul des coefficients de la série $P(s)$ avec une très grande exactitude, et les calculs nécessaires pour arriver au but sont alors très longs et très fatigants. Il faut par exemple avoir les puissances des logarithmes naturels avec environ 20 décimales.

Rebuté par ces difficultés, j'ai cherché une autre voie pour calculer les premiers α, et quoique mes calculs sur ce point exigent encore un complément, j'ai néanmoins réussi à obtenir quelques résultats qui ont assez d'intérêt pour que je désire les publier dès à présent. Tout en me réservant de donner plus tard des renseignements plus complets, je me borne ici à quelques indications sommaires.

D'après les théorèmes de Riemann sur la fonction $\xi(t)$, on peut, pour les petites valeurs de t, développer $\log \xi(t)$ en une série de la forme

$$\log \xi(t) = a_0 - \frac{t^2}{1} \Sigma \frac{1}{\alpha^2} - \frac{t^4}{2} \Sigma \frac{1}{\alpha^4} - \frac{t^6}{3} \Sigma \frac{1}{\alpha^6} - \dots$$

Les coefficients de cette série pourront, s'ils sont connus, servir à la détermination des α. Afin d'obtenir ces coefficients, j'ai calculé directement $\log \xi(it)$ pour $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots \frac{29}{2}$, avec 20 décimales, en partie au moyen des valeurs de $\zeta(s)$ données avec 30 décimales par Stieltjes (*Acta Mathematica*, t. X). En outre je possède la valeur de $\zeta(\frac{1}{2})$ avec 26 décimales d'après une communication de Stieltjes. J'ai vérifié le résultat donné par cet auteur et trouvé moi-même:

$$\zeta(\tfrac{1}{2}) = -1{\cdot}4603'5450''8809'''5868^{IV}1288^{V}9499^{VI}1525^{VII}125 \text{ [1]}.$$

Cela me permet de calculer directement $\log \xi(0) = a_0$.

On peut alors former les valeurs de

$$\frac{\log \xi(it) - \log \xi(0)}{t^2} = a_1 + a_2 t^2 + a_3 t^4 + \dots$$

et déterminer la valeur numérique de a_1 par interpolation: le calcul est facilité par cette circonstance que la fonction

[1]) Les indices ont pour but de mieux marquer l'ordre des différentes unités.

considérée est paire. Une fois a_1 trouvé, on peut continuer par le même procédé à déterminer successivement les coefficients suivants de la série qui représente $\log \xi(it)$. La série ainsi obtenue pour $\log \xi(t)$ se trouve ci-dessous avec 16 décimales.

$\log_e \xi(t) =$	$\xi(t) : \xi(0) = 1$
$-\,0{\cdot}6989'2226''7945'''3314^{IV}$	$-\,0{\cdot}0231'0499''3115'''4190^{IV}t^2$
$-\,231'0499''3115'''4190^{IV}t^2$	$+\,2'4833''4053'''7892^{IV}t^4$
$-\,1858''6299'''6426^{IV}t^4$	$-\,167''4352'''6280^{IV}t^6$
$-\,4''8057'''9771^{IV}t^6$	$+\,8030'''6974^{IV}t^8$
$-\,165'''7579^{IV}t^8$	$-\,29'''4014^{IV}t^{10}$
$-\,6427^{IV}t^{10}$	$+\,860^{IV}t^{12}$
$-\,26^{IV}t^{12}$	$-\,2^{IV}t^{14}$

De $\log \xi(it)$ on peut remonter à $\xi(it)$ lui-même; je donne dans le tableau précédent l'expression de $\dfrac{\xi(t)}{\xi(0)}$ en remarquant que

$$\xi(0) = 0{\cdot}4971'2077''8188'''3141^{IV}.$$

Remplaçant it par $s - \frac{1}{2}$, je possède donc le développement de

$$\log \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) - \frac{s}{2}\log \pi + \log (s-1)\,\zeta(s)$$

suivant les puissances de $(s - \frac{1}{2})$; d'où l'on peut facilement déduire le développement suivant les puissances de s ou de $(s-1)$.

En faisant $s = 1 + z$ et en calculant les coefficients du développement de $\log \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{z}{2}\right)$, on trouve ensuite la série représentant $\log z\zeta(1+z)$, et de cette série on déduit finalement celle qui représente $z\zeta(1+z)$ elle-même. Les coefficients de cette dernière étant, au signe près, les mêmes que ceux de la série $s\zeta(1-s)$, on est ainsi parvenu à vérifier les valeurs antérieurement calculées par M. Jensen avec 8 décimales, valeurs qui se sont trouvées exactes.

$\log_e \Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)\zeta(s) =$	$z\,\zeta(1+z) = 1$
$-\,0{\cdot}6931'4718''0559'''9453^{IV}$	$+\,0{\cdot}5772'1566''4901'''5329^{IV}z$
$-\,230'9570''8966'''1210^{IV}s$	$+\,728'1584''5483'''6767^{IV}z^2$
$+\,230'7715''8647'''9023^{IV}s^2$	$-\,48'4518''1596'''4361^{IV}z^3$
$+\,3705''2743'''8174^{IV}s^3$	$-\,3'4230''5736'''7172^{IV}z^4$
$-\,1840''6805'''3155^{IV}s^4$	$+\,9689''0419'''3944^{IV}z^5$
$-\,14''3018'''6711^{IV}s^5$	$-\,661''1031'''8108^{IV}z^6$
$+\,4''6906'''0695^{IV}s^6$	$-\,33''1624'''0909^{IV}z^7$
$+\,653'''4559^{IV}s^7$	$+\,10''4620'''9459^{IV}z^8$
$-\,158'''6084^{IV}s^8$	$-\,8733'''2181^{IV}z^9$
$-\,3'''1416^{IV}s^9$	$+\,94'''7827^{IV}z^{10}$
$+\,5997^{IV}s^{10}$	$+\,56'''5842^{IV}z^{11}$
$+\,154^{IV}s^{11}$	$-\,6'''7687^{IV}z^{12}$
$-\,24^{IV}s^{12}$	$+\,3492^{IV}z^{13}$
$-\,1^{IV}s^{13}$	$+\,44^{IV}z^{14}$
	$-\,24^{IV}z^{15}$
	$+\,2^{IV}z^{16}$

Mes calculs ont, pour la plus grande partie, été faits avec 20 décimales. Les vérifications que j'ai pu faire m'ayant montré qu'on ne peut pas avoir confiance dans les derniers chiffres, j'ai rejeté toutes les décimales qui viennent après la 16$^{\text{ième}}$. J'ai lieu de croire que mes résultats sont exacts au moins jusqu'au 15$^{\text{ième}}$ chiffre inclusivement; mais pour être tout à fait certain de ce point, il faudrait recalculer quelques-uns des coefficients, particulièrement les premiers, d'après une méthode tout à fait différente. J'espère avoir l'occasion d'achever aussi ce calcul et parvenir à donner les coefficients avec assez d'exactitude pour qu'on puisse déterminer au moins les trois ou quatre premiers α à une unité près. Les valeurs que donnent actuellement mes calculs sont les suivantes:

$$\alpha_1 = 14{\cdot}135,\quad \alpha_2 = 20{\cdot}82,\quad \alpha_3 = 25{\cdot}1.$$

Mais on ne peut pas se fier aux deux derniers chiffres.